

# Der schweizerische Koordinaten-Nullpunkt bei Bordeaux <sup>1</sup>

Thomas Dähler, Zürich

*Zusammenfassung: Der vorliegende Beitrag erläutert die Berechnung und Absteckung des schweizerischen Koordinaten-Nullpunktes bei St-Emilion in der Nähe von Bordeaux. Es wird ausführlich auf die Zylinderprojektion der Schweiz, die Kegelprojektion (Lambert) in Frankreich und einleitend auf Kartenbild, Projektionsverzerrungen und Kartennetz eingegangen. Der Artikel schliesst mit Fehlerbetrachtungen und Literaturhinweisen.*

*Résumé : «Le point zéro des coordonnées suisses près de Bordeaux»: L'article présenté ci-dessous explique le calcul et l'implantation du point zéro du système de coordonnées suisses près de St-Emilion à proximité de Bordeaux. Il donne des détails relatifs au système de projection cylindrique de la Suisse, au système de projection sphérique français (Lambert) et un aperçu de la cartographie, des déformations des projections et du réseau cartographique. Il conclut par des considérations sur les sources d'erreurs.*

## 1. Erdoberfläche und Kartenbild

Die Pläne und Karten einer Landesvermessung, wie alle geografischen Karten, sind in die Zeichnungsebene übertragene, verkleinerte Abbildungen eines grösseren oder kleineren Teils der Erdoberfläche. Für geografische Karten mit stark verkleinertem Bild kann die Erde in Kugelform angenommen werden. Für die Landesvermessung, die auf den Zentimeter gehende Lagebestimmungen der Triangulationspunkte gibt, muss die gegen die Pole hin abgeplattete Erdform berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck nimmt man an, es handle sich bei der Erde um ein Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse mit der Drehachse der Erde zusammenfällt. Die Abmessungen dieses Ellipsoids sind durch Gradmessungen, später unter Einbezug von Schweremessungen und neuerdings durch Satellitenbeobachtungen bestimmt worden und weichen je nach der verwendeten Messmethode etwas voneinander ab (Tafel 1).

Berechnet von		Grosse Halbachsen	Kleine Halbachsen	Anwendung
Schmidt	1828	6 376 804 m	6 355 691 m	Dufour- und Siegfriedkarte
Bessel	1841	6 377 397 m	6 356 079 m	neue Landesvermessung
Hayford	1910	6 378 388 m	6 356 912 m	intern. Ellipsoid
Kosai	1962	6 378 165 m	6 356 783 m	Satellitenbestimmung

Tafel 1: Einige Ellipsoiddimensionen

Die Bildübertragung von Kugel- oder Ellipsoidoberfläche in die Zeichenebene oder auf einen in die Ebene abwickelbaren Mantel eines Kegels oder Zylinders (Torse) erfolgt nach geometrischen oder rein mathematischen Gesetzen und wird Kartenprojektion genannt. Es sind sehr viele streng definierte Kartenprojektionen möglich, von denen aber nur eine kleine Zahl praktische Bedeutung besitzt und nur ganz wenige dem aus der darstellenden Geometrie bekannten Begriff der Projektion entsprechen.

Da die doppelt gekrümmte Oberfläche des Ellipsoids oder der Kugel nicht in die Ebene abwickelbar ist, entstehen im Kartenbild Verzerrungen, die umso grösser sind, je grösser der

<sup>1</sup> Artikel ist erschienen in der Ausgabe 6/76 (August 1976) der Zeitschrift Vermessung-Mensuration (Herausgeber: Verband schweizerischer Vermessungstechniker VSVT)

abzubildende Teil der Erdoberfläche ist. Bei der Wahl der Projektion ist man bestrebt, diese Verzerrungen möglichst klein zu halten und nur in solcher Art zuzulassen, wie sie dem Zweck der Karte am wenigsten abträglich sind.

Bei der Landesvermessung beschränkt man sich auf die gesetzmässige Übertragung der Triangulationsnetze 1. und 2. Ordnung, die auf dem Ellipsoid berechnet werden. Alle weiteren Abbildungsgegenstände (Triangulationen 3. und 4. Ordnung, Polygonzüge und Detailvermessung) werden auf dieses Netz bezogen, dessen Dreiecke so klein sind (Seitenlängen 10 bis 15 km), dass sie für Lagebestimmungen als eben betrachtet werden können. Bei den geografischen Karten wird eine Anzahl Gradnetz-Schnittpunkte nach den Projektionsgesetzen in die Zeichnungsebene übertragen und so das Gradnetz gezeichnet. Alle weiteren Bildübertragungen erfolgen dann in die Gradnetzfelder nach den Zeichenregeln für die ebene Bildübertragung.

## 2. Die Projektionsverzerrungen

Die Formänderungen, die das Urbild des Ellipsoides oder der Kugel durch die Übertragung in die Ebene erleidet, sind auf Änderungen der Längen und Winkel zurückzuführen, wodurch auch Änderungen im Flächeninhalt entstehen können. Man unterscheidet demnach im projizierten Bild Längen-, Winkel- und Flächenverzerrungen, die man allgemein als Projektionsverzerrungen bezeichnet. Bei kleinen Ausschnitten aus der Erdoberfläche, wie zum Beispiel bei unseren Landeskarten, sind die Verzerrungen aber so klein, dass sie kaum mehr messbar sind. Anders in Weltkarten, wo Grönland und die Antarktis oft grösser erscheinen als Afrika.

Für die Projektion kann die Forderung nach Flächentreue **oder** Winkeltreue gestellt werden, beides zusammen ist jedoch nicht erreichbar. Nach diesen Forderungen werden bei den Kartenprojektionen zwei Hauptgruppen unterschieden:

- a) Flächentreue (oder äquivalente) Projektionen. Zu diesen gehört die Bonne-Projektion der Dufour- und Siegfriedkarte. Jede beliebige Fläche des Urbilds ist im Projektionsbild inhaltsgleich.
- b) Winkeltreue (oder konforme) Projektionen. Hierher gehört die winkeltreue Zylinderprojektion der neuen Landeskarte (Bild 1). Die Winkel im Schnittpunkt beliebiger Linien des Urbildes bleiben im Projektionsbild unverändert. Die Winkeltreue gilt nur im Schnittpunkt selbst, also im unendlich Kleinen, wo die Linienelemente als gerade Strecken bezeichnet werden können.

Längentreue lässt sich im Allgemeinen nicht erfüllen, sie muss sich auf besondere Linien beschränken, deren Längen ohne Verzerrung dargestellt werden können. In der Bonne-Projektion sind dies die Breitenkreise und der Mittelmeridian, in der Zylinderprojektion ist es die Y-Achse durch Bern.

Wenn gleichzeitige Flächen- und Winkeltreue nicht möglich ist, so kann, doch bei einer winkeltreuen Projektion für ein bestimmtes Gebiet eine möglichst kleine Flächenverzerrung verlangt werden und umgekehrt eine möglichst kleine Winkelverzerrung für eine flächentreue Projektion.

Als man sich Gedanken machte über die Durchführung einer neuen Landesvermessung, erkannte man, dass für das relativ kleine Gebiet der Schweiz eine winkeltreue Vermessung wichtiger ist, als die unbedingte Einhaltung der Flächentreue. Bei der in der Dufour- und Siegfriedkarte angewandten flächentreuen Kegelprojektion (Bonne-Projektion) war die Winkelverzerrung in den Randgebieten der Schweiz bereits beträchtlich und musste für alle exakten Vermessungsarbeiten mit berücksichtigt werden. Die neue winkeltreue Zylinderprojektion ergibt in den Süd- und Nordgebieten der Schweiz Flächenverzerrungen, die kleiner sind als die durch ungleiche Meereshöhen verursachten Flächenfehler.

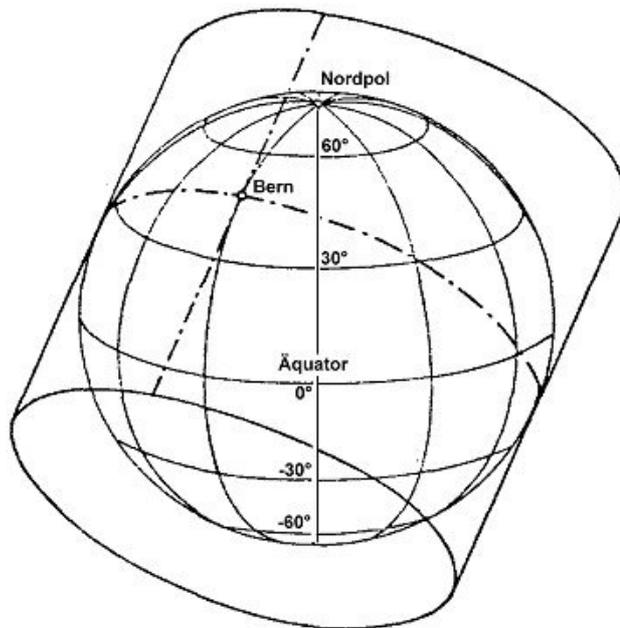


Bild 1: Die schiefachsige Zylinderprojektion der Landkarte der Schweiz

### 3. Das Koordinatennetz auf dem Projektionszylinder

Den in die Zeichnungsebene abgewickelten Zylinder der neuen Landesvermessung versah man mit einem Koordinatennetz, dessen Nullpunkt mit dem Meridianinstrument der alten Sternwarte Bern zusammenfällt. Der positive Ast der Y-Achse dieses Systems zeigt nach Osten und derjenige der X-Achse nach Norden. X- und Y-Achse sind aber gegenüber den in der Mathematik gebräuchlichen Bezeichnungen vertauscht; dieses System ist heute in der Vermessung allgemein üblich. Da die positiven Achsen des Systems nach Norden und Osten zeigen, würden westlich und südlich von Bern negative Koordinatenwerte auftreten. Häufig haben aber auch Leute mit koordinatenmässig festgelegten Ortsbezeichnungen zu tun, die im Umgang mit negativen Zahlen nicht so geübt sind, wie man dies von Geometern und Vermessungszeichnern verlangen darf. Das gilt insbesondere bei der militärischen Verwendung der Landkarten. Man bediente sich deshalb eines einfachen Tricks: die Y-Koordinaten (West-Ost-Richtung) wurden um 600 km erhöht und die X-Koordinaten (Süd-Nord-Richtung) um 200 km. Damit bewegen sich die auf dem Gebiet der Schweiz auftretenden Y-Koordinaten zwischen 483000 und 833000 m und die X-Koordinaten zwischen 77000 und 297000 m. Die Koordinaten von Bern betragen 600 000 und 200 000 m. 600 km westlich und 200 km südlich von Bern befindet sich demnach der Nullpunkt dieses Koordinatensystems (Bild 2).

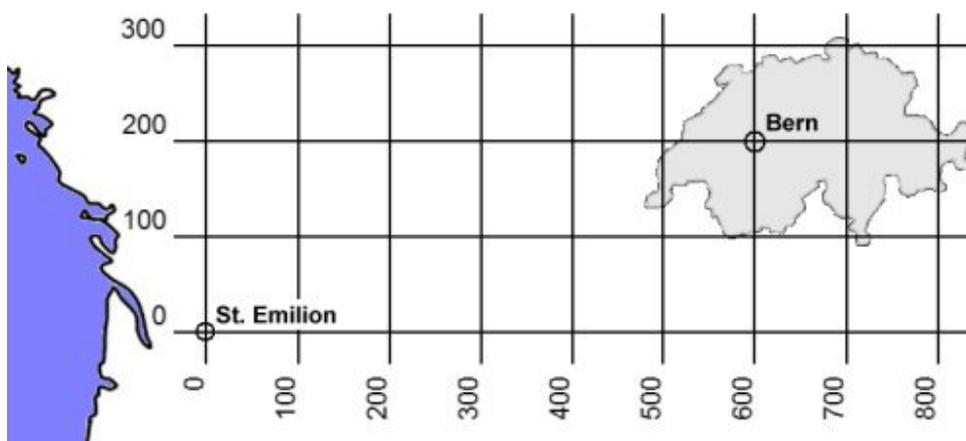


Bild 2: Das schweizerische Koordinatennetz

Bis anhin wusste man lediglich, dass dieser Punkt irgendwo östlich der süd-französischen Metropole Bordeaux liegt. Vier Studenten haben die genaue Lage dieses Punktes berechnet und sich Anfang April 1974 nach Bordeaux begeben, um ihn zu suchen, abzustecken und eine dauerhafte Markierung anzubringen.

#### 4. Berechnung des Nullpunktes

Bevor die Reise nach Frankreich und die Absteckung des Punktes erfolgen konnten, musste dessen genaue Lage berechnet werden. Die Berechnung gliederte sich hauptsächlich in die drei Teile:

- Übertragung des Punktes vom Projektionszylinder der schweizerischen Landesvermessung auf das Erdellipsoid Transformation von Landes- in geografische Koordinaten);
- Übertragung der geografischen Koordinaten (Länge und Breite) auf den Projektionskegel der südfranzösischen Lambert-Projektion, einer winkeltreuen Kegelprojektion (Transformation der geografischen Koordinaten in lokale Koordinaten);
- Absteckung des Punktes an Ort und Stelle mittels eines Polygonzuges, der an Vermessungsfixpunkte des lokalen Systems angeschlossen wurde.

Diese drei Arbeitsabläufe werden nachstehend einzeln beschrieben.

#### 5. Die winkeltreue, schiefachsige Zylinderprojektion der Schweiz

Wenn für eine Landesvermessung, die auch der Grundbuchvermessung und damit der genauen Arealbestimmung dient, eine winkeltreue Projektion gefordert wird, so ist die zweite Bedingung, die Flächenverzerrung möglichst klein zu halten. Bei der winkeltreuen Projektion sind Längen- und Flächenverzerrung, die sich auf unendlich kleine Elemente beziehen, eine Funktion des Abstandes vom Berührungskreis, welcher als Y-Achse gebildet wird. Die günstigste Lage für den Berührungskreis wäre die Längsachse der Schweiz, welche sich ungefähr über Biere-Thun-Altendorf-Schiers hinweg legt. Aus technischen und historischen Gründen wurde ein Berührungskreis senkrecht zum Meridian durch die Sternwarte von Bern gewählt (Bild 1). Damit wird die Flächenverzerrung im nördlichsten Punkt der Schweiz +0,21 ‰ und im südlichsten +0,38 ‰, also fast das Doppelte.

Das Erdellipsoid wird allerdings nicht direkt auf einen Zylinder abgebildet, sondern zuerst auf eine Projektionskugel. Auch diese Übertragung erfolgt selbstverständlich winkeltreu. Es handelt sich dabei praktisch nur um eine Längen- und Breitenkorrektur, die erforderlich ist, um den ungleichmässigen Abstand der Breitenkreise auf dem Ellipsoid auszugleichen. Diese Kugelkoordinaten werden dann nach den Gesetzen der Mercator-Projektion auf den Zylinder übertragen. Zu sagen wäre hier noch, dass es sich bei dieser Übertragung nicht um eine Projektion im geometrischen Sinne handelt, sondern um eine mathematische Abbildung.

Diese Übertragung ist anspruchsvoll und ihre eingehende Erläuterung würde den Rahmen des Aufsatzes sprengen. Allfällige Interessenten seien auf die Bücher [1] und [2] verwiesen.

Y = -600'000.00 m	Kugellänge westlich Bern: 7° 36' 33.17862"	Ellipsoid-Länge westl. Greenwich: 0° 9' 50.71977"
X = -200'000.00 m	Nördliche Kugelbreite: 44° 51' 0.84272"	Nördliche Ellipsoid-Breite: 44° 53' 28.74461"

Tafel 2: Ergebnisse der winkeltreuen Übertragung vom Zylinder auf das Ellipsoid

## 6. Die winkeltreue Kegelprojektion (Lambert-Projektion) in Frankreich

Da das Gebiet der Republik Frankreich wesentlich ausgedehnter ist, als das der Schweiz, hat man das Land in mehrere Projektionszonen eingeteilt. Mit dieser Schachtelung erreicht man, dass die maximale Flächenverzerrung nur etwa 50% grösser wird, als diejenige des Schweizer Zylinders in Chiasso.

Die drei Festland-Zonen sind im Prinzip alle gleich aufgebaut: es handelt sich um Kegel, deren Spitzen mit der verlängerten Erdachse zusammenfallen und die die Erde jeweils an einer mittleren Breite  $B_0$  berühren.

Lambert I (Zone Nord)  $B_0 = 55^\circ$  ( $^\circ =$  Neugrad)

Lambert II (Zone Mitte)  $B_0 = 52^\circ$

Lambert III (Zone Süd)  $B_0 = 49^\circ$

Lambert IV (Korsika)  $B_0 = 46,85^\circ$

Auf dem Kegelmantel werden die Meridiane als Geraden und die Breitenkreise als Kreise abgebildet. Die Radien dieser Breitenkreise (auf der abgewickelten Kegelfläche) werden so gewählt, dass die Projektion in jedem Punkt winkeltreu ist. Diese Übertragung ist von der Berechnung her gesehen etwas einfacher als die Zylinderprojektion.

Dem abgewickelten Kegelmantel wird ein orthogonales Koordinatensystem überlagert, dessen Zentrum im Schnittpunkt des Meridians von Paris mit der mittleren Breite  $B_0$  liegt. Aus ähnlichen Gründen wie in der Schweiz erhalten auch in Frankreich die jeweiligen Projektionszentren Koordinaten mit  $Y_0 = 600000$  m und  $X_0 = 200000$  m. Unser Nullpunkt fällt mit einer nördlichen Breite von  $49,88$  Neugrad in die Projektionszone Süd, also Lambert III. Die Übertragung auf den Kegel liefert folgende Ergebnisse:

Ellipsoid-Länge westl. Greenwich: $0^\circ 9' 50.71977''$	Länge westlich Paris: $2.77924222^\circ$	$Y = -197'566.621 + 600'000 =$ <b><math>402'433.379</math> m</b>
Nördliche Ellipsoid-Breite: $44^\circ 53' 28.74461''$	Nördliche Breite: $49.8792421^\circ$	$X = 90'925.135 + 200'000 =$ <b><math>290'925.135</math> m</b>

## 7. Lokale Ermittlung des Punktes

Der Kreisgeometer von Libourne, Michel Labatut, stellte uns für die Absteckung Pläne und Koordinaten der in der Nähe liegenden Fixpunkte zur Verfügung. Wir legten einen Polygonzug durch die «voie communale de la pège» zu der Stelle, an welcher wir den Nullpunkt aufgrund der Pläne vermuteten. Die Berechnung des Polygonzuges ergab dann die Korrektur auf den endgültigen Standort des Nullpunktes.

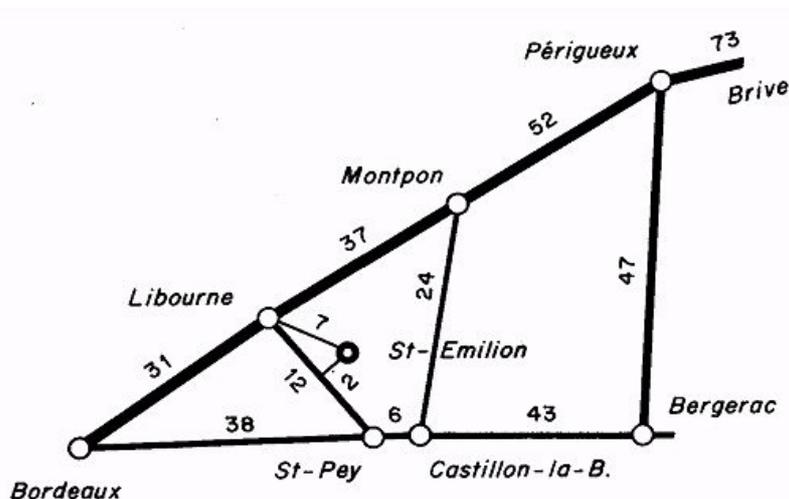


Bild 3: Lage-Schema, Distanzangaben in Kilometer

Der Punkt liegt etwa 600 m westlich des Städtchens St-Emilion, welches das Zentrum eines ausgedehnten Weingebietes ist und selber einen Rebensaft von Weltklasse hervorbringt, am Rande eines Weinberges, welcher zum Besitz des Chateau Canon gehört (Bild 3 und 4). Der Pächter dieses Gutes, Herr Lavie, erlaubte freundlicherweise, den Punkt gemäss nachstehender Beschreibung zu versichern und stellte sogar Baumaterialien und eine Flasche Wein zur Verfügung. Der Punkt ist zentrisch durch eine Tonplatte mit Inschrift etwa einen Meter unter Terrain versichert. Darüber befindet sich eine 120 cm lange Eternit-Röhre, die mit Beton gefüllt wurde, etwa 40 cm über Terrain ragt und mit einem Messingbolzen als Zentrumsbezeichnung versehen ist (Bild 5 und 6).

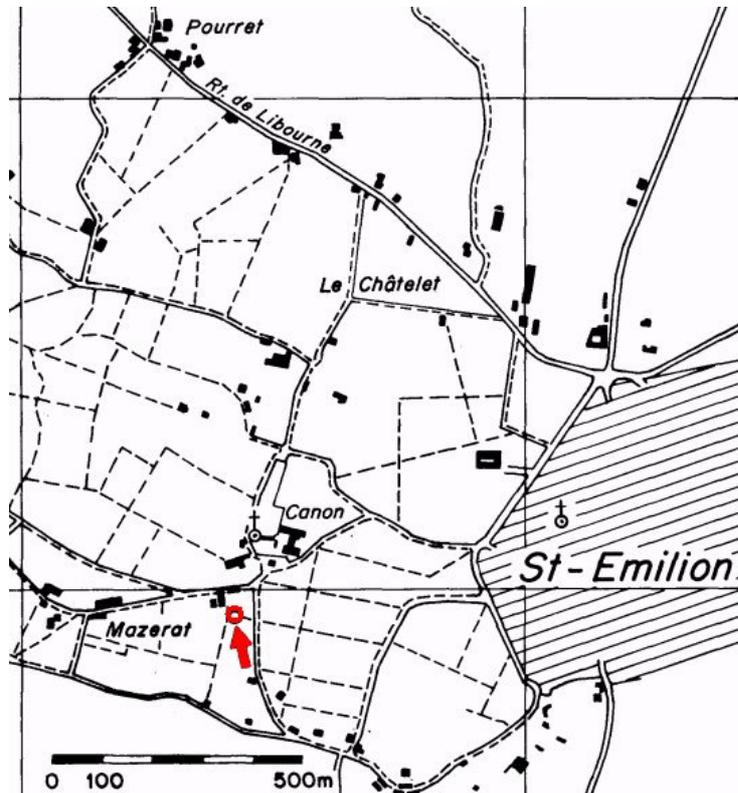


Bild 4: Plan des schweizerischen Koordinaten-Nullpunktes bei Bordeaux, 600 m westlich St-Emilion

## 8. Fehlerbetrachtungen

Es ist natürlich eine Illusion zu glauben, dass sich unser Nullpunkt in St-Emilion auf den Zentimeter genau 200 km südlich und 600 km westlich von seinem Pendant in Bern befindet. Im lokalen System dürfte der Fehler gewiss klein sein. Ein beachtlicher Fehler ergibt aber die Unsicherheit in der internationalen Gradmessung. Geodätische Arbeiten dieser Grössenordnung stützen sich auf astronomische Ortsbestimmungen und die Genauigkeit solcher Messungen liegt bei wenigen Metern. Liegen mehrere astronomisch bestimmte Punkte (Laplace-Punkte) relativ nahe beieinander (weniger als 150 km), dann können sie durch gegenseitige Azimutmessungen untereinander ausgeglichen werden. Da die Länge der Dreieckskette, auf die sich unsere Obertragung stützt, gegen tausend Kilometer betragen wird, darf nicht mehr mit einer grösseren Genauigkeit, als sie die Astronomie liefert, gerechnet werden.



Bild 5: Der schweizerische Koordinaten-Nullpunkt bei St-Emilion in der Nähe von Bordeaux/Frankreich: hier erhält er gerade den letzten Schliff



Bild 6: Die Nullpunkt-Pioniere am Ziel, v. l. n. r. K. Rolli, L. Martignoni, H. Roder und Th. Dähler

Als weitere Fehlerquelle tritt die Unsicherheit in der Grösse des Erdellipsoides in Erscheinung. Frankreich stützt sich auf das Ellipsoid von Clarke, dessen Dimensionen nicht unwesentlich von denen des Besselschen abweichen. Man darf aber erwarten, dass der abgesteckte Punkt mit einer Genauigkeit von etwa 30 Metern stimmen wird.

Anschrift des Verfassers: Thomas Dähler, Zielackerstrasse 41, 8048 Zürich

## Literatur

- [1] Bolliger, Jakob: Die Projektionen der schweizerischen Plan- und Kartenwerke.
- [2] Odermatt, Hans: Tafeln zum Projektionssystem der schweizerischen Landesvermessung.
- [3] IGN Paris: Tables des constantes numériques des systèmes de projection Lambert en usage de l'Institut nationale géographique (IGN).